

Arborele binar asociat unei expresii aritmetice

O expresie aritmetică (matematică) este un șir de caractere compus din:

- variabile
- constante
- operatori
- (eventual) paranteze.

Fiecărei expresii aritmetice i se poate asocia un arbore binar, numit arborele sintactic, în care:

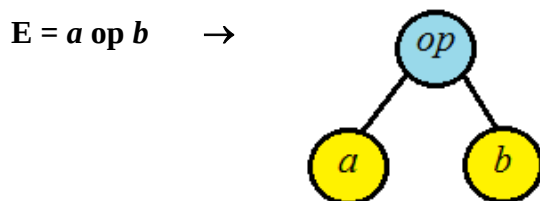
- nodurile interioare reprezintă **operatorii**: +, -, *, /, % ;
- frunzele reprezintă **constantele** sau **variabilele**.

Arborele sintactic este construit după următoarele reguli:

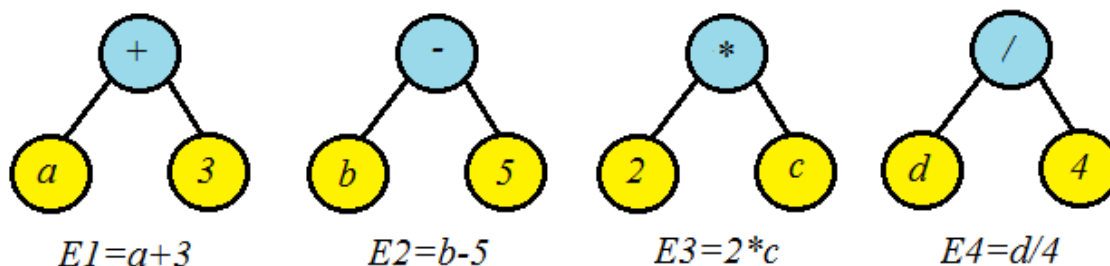
A1) dacă expresia este formată dintr-un singur operand, arborele binar asociat are un singur nod, **nod rădăcină**, care conține drept informație utilă operandul respectiv. **De exemplu**, sunt reprezentați operandii a , 12:



A2) dacă expresia este de forma $E = a \text{ op } b$, unde op este un operator binar iar a și b sunt doi operanzi, i se asociază un arbore binar care are nodul rădăcină etichetat cu operatorul respectiv, subarborele stâng este operandul a iar subarborele drept este operandul b .

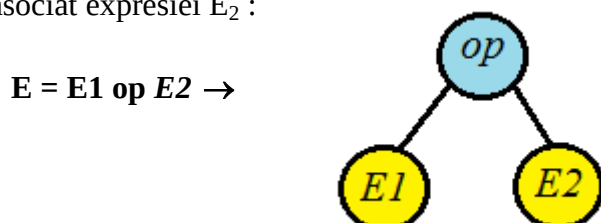


De exemplu, arborii asociați expresiilor $E_1 = a+3$, $E_2 = b-5$, $E_3 = 2*c$, $E_4 = d/4$ sunt următorii:

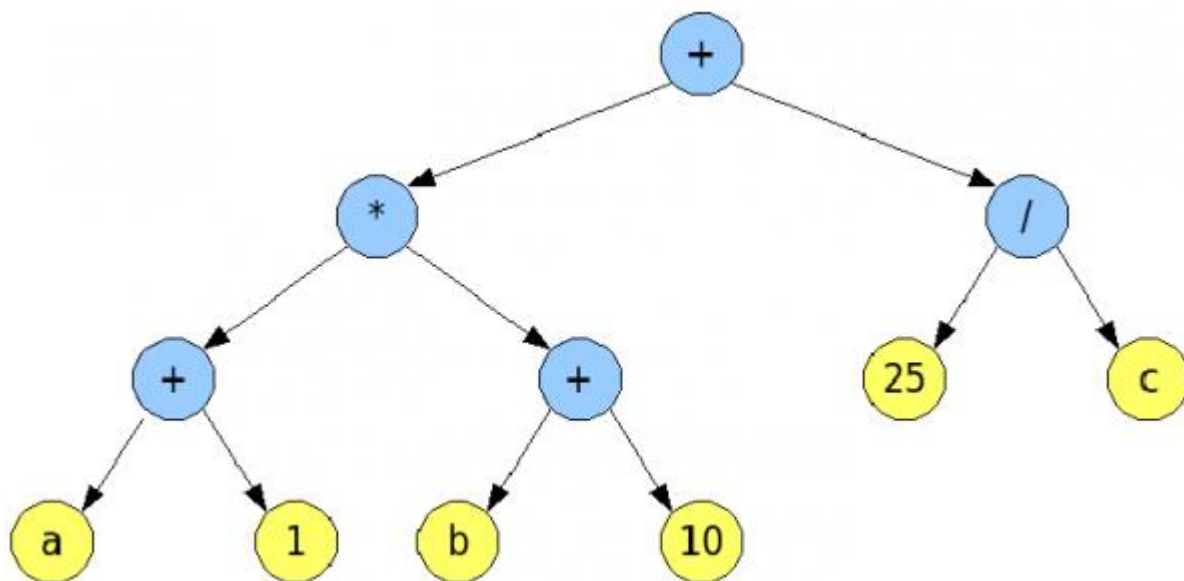


A3) dacă $E = (E1)$, unde $E1$ este o expresie aritmetică, atunci arborele binar asociat lui E coincide cu arborele binar asociat lui $E1$.

A4) dacă expresia este de forma $E = E_1 \text{ op } E_2$, unde op este un operator binar iar E_1 și E_2 sunt alte expresii, i se asociază un arbore binar care are nodul rădăcină etichetat cu operatorul respectiv, subarborele stâng arborele binar asociat expresiei E_1 și subarborele drept arborele binar asociat expresiei E_2 :



Exemplu: Pentru expresia $(a+1)*(b+10)+25/c$, arborele asociat este prezentat mai jos:



Observații:

AO1) În arborele binar asociat unei expresii **nu apar parantezele**.

AO2) Pentru operațiile comutative $+$, $*$ ordinea subarborilor stâng și drept nu contează, aceștia pot fi inversați iar arborele este bine construit. În cazul operațiilor necomutative $-$, $/$, $\%$ ordinea subarborilor este strict precizată, adică subarborii nu pot fi inversați în reprezentare.

AO3) Arborele binar asociat unei expresii **nu este unic**, în general. Se pot obține arbori sintactici diferiți dacă se interschimbă subarborii în cazul operațiilor comutative, iar pentru unele expresii există mai multe posibilități de alegere a rădăcinii arborelui sau a subarborilor.

Forma poloneză asociată unei expresii

Notăția poloneză a expresiilor aritmetice reprezintă una dintre cele mai importante aplicații ale arborilor binari. Această notăție a fost introdusă de matematicianul polonez **J. Lukasiewicz** în 1920. Forma poloneză a expresiilor aritmetice este utilă în faza de compilare a programelor ca formă intermediară pentru generarea codului obiect, necesar în faza de execuție pentru evaluarea acelei expresii.

Forma poloneză prefixată

Forma poloneză prefixată a unei expresii aritmetice E , sau **notația prefixată** asociată expresiei E , se obține prin parcurgerea în preordine a unui arbore binar asociat expresiei E .

Forma poloneză prefixată, notată cu **fpp**, poate fi obținută și dintr-o expresie aritmetică direct, prin aplicarea următoarelor reguli:

FPP1) Dacă expresia este formată dintr-un singur operand, **fpp** coincide cu acel operand.

FPP2) Pentru o expresie de forma $E = a \text{ op } b$, avem $\text{fpp}(E) = \text{op } a \text{ b}$.

De exemplu, pentru expresiile $a+b$, $a-b$, $a*b$, a / b , $c \% b$, avem:

fpp(a+b) = + a b, **fpp(a-b) = - a b**, **fpp(a*b) = * a b**, **fpp(a/b) = / a b**, **fpp(a%b) = % a b**.

FPP3) Pentru o expresie cu paranteze de forma $E = (E1)$, **fpp asociată lui E** coincide cu **fpp asociată expresiei E1**, $\text{fpp}(E) = \text{fpp}(E1)$.

FPP4) Pentru o expresie de forma $E = E1 \text{ op } E2$, **FPP** = **op fpp(E1) fpp(E2)**.

Forma poloneză postfixată

Forma poloneză postfixată a unei expresii aritmetice E , sau **notația postfixată** asociată expresiei E , se obține prin parcurgerea în postordine a unui arbore binar asociat expresiei E .

Forma poloneză postfixată, notată cu **fpt**, poate fi obținută și dintr-o expresie aritmetică direct, prin aplicarea următoarelor reguli:

FPT1) Dacă expresia este formată dintr-un singur operand, **fpt** coincide cu acel operand.

FPT2) Pentru o expresie de forma $E = a \text{ op } b$, avem **fpt**(E) = $a \text{ b op}$.

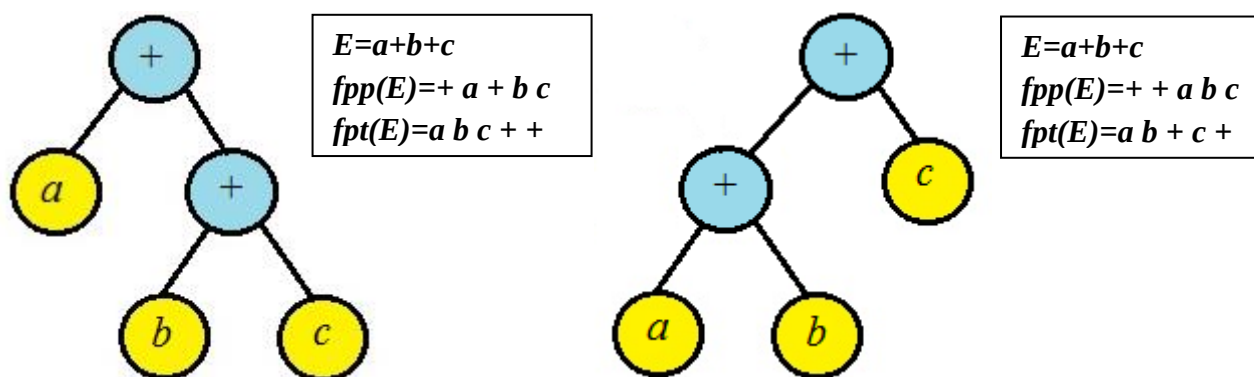
De exemplu, pentru expresiile $a+b$, $a-b$, $a*b$, a / b , $c \% b$, avem:

fpt($a+b$) = $a \text{ b } +$, **fpt**($a-b$) = $a \text{ b } -$, **fpt**($a*b$) = $a \text{ b } *$, **fpt**(a/b) = $a \text{ b } /$, **fpt**($a \% b$) = $a \text{ b } \%$.

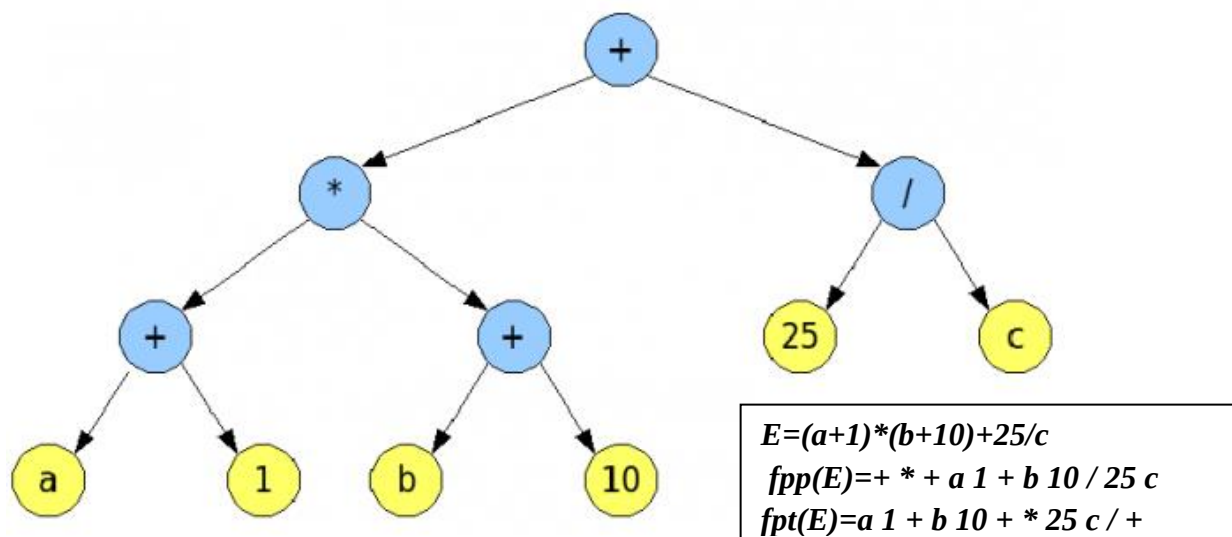
FPT3) Pentru o expresie cu paranteze de forma $E = (E1)$, **fpt** asociată lui E coincide cu **fpt** asociată expresiei $E1$, **fpt**(E) = **fpt**($E1$).

FPT4) Pentru o expresie de forma $E = E1 \text{ op } E2$, **FPT** = **fpt**($E1$) **fpt**($E2$) **op**.

Exemple: 1) Expresiei aritmetice $E = a+b+c$ îi pot fi asociați, de exemplu, arborii binari:



2) Pentru expresia $(a+1)*(b+10)+25/c$, cu arborele sintactic asociat alăturat, **formele poloneze prefixate și postfixate** sunt:



Observații:

FPO1) Forma poloneză prefixată (postfixată) a unei expresii **nu conține paranteze**.

FPO2) Forma poloneză prefixată (postfixată) a unei expresii **nu este unică**.

FPO3) **Operanzii apar scriși în aceeași ordine** ca și în notația infixată a expresiei aritmetice.

Aplicații:

1. Reprezentați arborii binari asociați expresiilor aritmetice alăturate și precizați *forma poloneză prefixată* și *postfixată* a expresiei:

Expresia	Arborele sintactic asociat	Forma poloneză
$E1 = a * b + c / d - e$		
$E2 = a * (b + c) / (d - e)$		
$E3 = (a + b) * (c - d \% e)$		
$E4 = (a + b) * (b + c) * (c + a)$		
$E5 = \frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{b}$		
$E6 = \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$		
$E7 = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$		
$E8 = \frac{x}{x+y-z} + \frac{y}{x-y+z} + \frac{z}{z+y-x}$		

2. Deduceți scrierea în forma obișnuită (*notația infixată*) a următoarelor expresii aritmetice, date în *forma poloneză prefixată*, știind că toate constantele care apar sunt formate dintr-o singură literă sau cifră și desenați arborele sintactic:

a) $+ * a b / a b$

b) $/ * a + b c d$

c) $* a / + b c d$

d) $/ + a b - a b$

e) $/ * + a b c \% - x y z$

f) $/ x + y / \% x 2 z$

g) $- * 2 + a b / + a 1 b$

h) $/ * + a 1 - b 2 \% + a b c$

i) $/ * + a b c \% - x y z$